Sveučilište u Zagrebu

Fakultet strojarstva i brodogradnje

ZAVRŠNI RAD

Vanja Matković

0035147629

Zagreb, 2008.

Sveučilište u Zagrebu

Fakultet strojarstva i brodogradnje

ZAVRŠNI RAD

Voditelj rada:

Dr. sc. Biserka Runje

Student:

Vanja Matković

0035147629

Zagreb, 2008.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE
Povjerenstvo za završne i diplomske radove
Studij STROJARSTVO
Računalno inženjerstvo

Zagreb, 13. studeni 2008.

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **VANJA MATKOVIĆ** Mat. br.: 0035147629

Naslov: **UTJECAJ FAKTORA PROŠIRENJA *k* U POSTUPKU PROCJENJIVANJA MJERNE NESIGURNOSTI**

Opis zadatka:

1. Potrebno je definirati pojam mjerne nesigurnosti. Dati temeljne postavke proračuna mjerne nesigurnosti kod primjene GUM metode (Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement) i alternativne MCS metode (Monte Carlo simulacije).

2. U svrhu utvrđivanja utjecaja faktora proširenja *k,* u postupku procjenjivanja proširene mjerne nesigurnosti, u radu primijeniti GUM i MCS metodu. Primjenom MCS metode istražiti povezanost faktora proširenja *k* u funkciji oblika izlazne raspodjele.

3. Provesti vrednovanje rezultata dobivenih GUM metodom.

U radu koristiti iskustva i materijale Laboratorija za precizna mjerenja dužina FSB-a, te navesti eventualnu pomoć.

Zadatak zadan: Krajnji rok predaje rada:

26. studenog 2008. Studeni 2009.

Zadatak zadao: Predsjednik povjerenstva

Doc.dr.sc. Biserka Runje Prof. dr. sc. Franjo Cajner

Referada za diplomske i završne ispite Obrazac PDS/DS - 3

Izjavljujem da sam ovaj rad radio samostalno, služeći se znanjem stečenim tokom studija i koristeći se navedenom literaturom.

Ovom prilikom bih se želio zahvaliti:

Voditeljici rada Biserki Runje na stručnim savjetima, sugestijama i pomoći tokom izrade završnog rada, te što mi je omogućila izradu istog.

Posebno bih se želio zahvaliti svojoj obitelji – ocu Vladimiru, majci Aniti te sestri Vlatki na razumijevanju i potpori, kako tokom izrade ovoga rada, tako i tokom cijeloga studija.

Zahvaljujem se svim svojim kolegama i prijateljima na potpori koju su mi pružili tokom svih godina studiranja.

SAŽETAK

U radu su opisane temeljne postavke mjerne nesigurnosti kod primjene klasične GUM (Guide to the Expression of Uncertainty in Messurement) metode, te alternativne MCS (Monte Carlo simulacije) metode.

U svrhu utvrđivanja utjecaja faktora proširenja *k*, u postupku procjenjivanja proširene mjerne nesigurnosti, u radu je primijenjena GUM i MCS metoda. Istražena je povezanost faktora proširenja *k* u funkciji oblika izlazne raspodjele primjenom MCS metode.

U završnom dijelu rada je provedeno vrednovanje rezultata dobivenih GUM metodom, te su analizirani i detaljno opisani rezultati Monte Carlo simulacije koja je provedena uz pomoć programskog paketa Mathcad.

SADRŽAJ

POPIS SLIKA

POPIS TABLICA

1. UVOD

Jedan od primarnih problema u mjeriteljstvu jest kako procijeniti mjernu nesigurnost rezultata mjerenja. Dok su se tradicionalne metode procijene mjerne nesigurnosti bazirale na iskustvu i ugledu osobe i laboratorija gdje su se vršila mjerenja, danas takove metode nisu više dostatne, već se zahtijevaju dokazi o iskazanoj mjernoj nesigurnosti. Posljednjih su godina širom svijeta uloženi ogromni napori s ciljem iznalaženja matematičkih modela i općih pravila za proračun i iskazivanje mjernih nesigurnosti. Tako je 1993 godine skupina stručnjaka iz međunarodnih organizacija s područja mjeriteljstva (ISO, IEC, BIPM, OIML, IUPAP, IUPAC, IFCC), u skladu sa zahtjevima od strane CIPM-a, izradila Upute za iskazivanje mjerne nesigurnosti ISO *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement* (u daljnjem tekstu GUM). Prihvaćanjem međunarodnog dogovora za iskazivanje mjerne nesigurnosti omogućeno je nedvosmisleno iskazivanje i usporedba mjernih rezultata dobivenih u različitim institutima, mjeriteljskim i ispitnim laboratorijima.

U skladu s GUM-om, godine 2006. europska organizacija Joint Committee for Guides in Metrology (YCGM) izdaje dokument YCGM YYY/2006 : *Evaluation of measurement data - Supplement 1 to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement" - Propagation of distributions using a Monte Carlo method*. Dok je GUM utemeljio opća pravila za proračun i iskazivanje mjerne nesigurnosti sa svrhom da budu primjenjiva na širokom spektru mjerenja, YCGM dokument koncentrirao se na alternativnu Monte Carlo metodu koja se, također, koristi za lakši i jednostavniji proračun i iskazivanje mjerne nesigurnosti.

2. TEMELJNI POJMOVI[1]

Slijedeći pojmovi su preuzeti iz Međunarodnog rječnika osnovnih i općih naziva u metrologiji (skraćeno VIM), treće izdanje [1] koji je objavila Međunarodna organizacija za normalizaciju (ISO), za lakše razumijevanje problematike ovog rada.

2.1. Mjerenje

Mjerenje je skup postupaka kojim se određuje jedna ili više mjernih veličina, tj. vrijednosti posebne veličine eksperimentalnim putem kako bi se vrijednost pridružila toj veličini. Mjerenje, prema tome, počinje s odgovarajućim točnim opisom mjerene veličine, mjerne metode i mjernog postupka.

2.2. Mjerena veličina

Mjerena veličina (veličina koju treba mjeriti) je posebna veličina podvrgnuta mjerenju. Specifikacija mjerene veličine zahtjeva znanje o vrsti veličine, te opis stanja pojave, tijela ili tvari koje nose veličinu, uključujući svaku važnu sastavnicu.

2.3. Mjerna metoda

Mjerna metoda se izražava kao smislen niz postupaka, opisanih prema rodu, koji se upotrebljavaju za provođenje mjerenja.

2.4. Mjerni postupak

Mjerni postupak je detaljan opis mjerenja, opisanih prema jednoj ili više mjernih načela i za danu mjernu metodu, koja se bazira prema mjernom modelu i uključuje bilo koji proračun kako bi se dobio rezultat mjerenja.

2.5. Mjerni rezultat

Mjerni rezultat uključuje skup vrijednosti veličina priključenih mjerenoj veličini zajedno sa bilo kojom drugom važnom informacijom. U pojednostavljenom obliku to je vrijednost dobivena mjerenjem pripisana kojoj mjerenoj veličini. Mjerni rezultat općenito se izražava kao pojedinačna mjerna veličina i mjerna nesigurnost. Ako se smatra da je mjerna nesigurnost, iz nekog razloga, beznačajna, mjerni rezultat se može izraziti kao pojedinačna mjerna veličina.

2.6. Mjerna nesigurnost

Mjerna nesigurnost je ne-negativan parametar koji karakterizira rasipanje vrijednosti koje bi se razumno mogle pripisati mjernoj veličini, prema informacijama koje se upotrebljavaju, uz određenu vjerojatnost. Taj parametar može biti primjerice bilo kakvo odstupanje ili poluširina intervala s navedenom razinom povjerenja. Mjerna nesigurnost se sastoji od više sastavnica. Neke od tih sastavnica mogu se odrediti na temelju statističke razdiobe niza mjerenja i mogu se opisati eksperimentalnim standardnim odstupanjima. Druge sastavnice, koje se također mogu opisati standardnim odstupanjima, određuju se iz pretpostavljenih razdioba vrijednosti na temelju iskustva ili drugih podataka.

2.7. Mjerna pogreška

Mjerna pogreška se izražava kao istinita vrijednost mjerne veličine umanjena za mjerni rezultat. Pogreška se uobičajeno smatra sastavljenom od dviju sastavnica: slučajne i sustavne sastavnice.

2.8. Sustavna pogreška

Sustavna pogreška je sastavnica mjerne pogreške, koja u ponovljenim mjerenjima ostaje konstantna ili varira predvidljivim načinom. Algebarski izraženo, sustavna pogreška je srednja vrijednost koja bi proizašla iz beskonačnog broja mjerenja iste mjerne veličine izvedenih u uvjetima ponovljivosti umanjena za istinitu vrijednost mjerene veličine.

2.9. Slučajna pogreška

Slučajna pogreška je, također, sastavnica mjerne pogreške, koja se u ponovljenim mjerenjima mijenja u nepredvidljivim načinom. Također, opisano algebarskim izrazom, slučajna pogreška je mjerni rezultat umanjen za srednju vrijednost koja bi proizašla iz beskonačnog broja mjerenja iste mjerene veličine izvedenih u uvjetima ponovljivosti.

2.10. Standardna nesigurnost

Standardna nesigurnost je nesigurnost mjernog rezultata izražena kao standardno odstupanje.

2.11. Sastavljena standardna nesigurnost

Sastavljena standardna nesigurnost je standardna nesigurnost mjernog rezultata kada se taj rezultat dobije koristeći pojedine standardne nesigurnosti pridružene ulaznim veličinama mjerenog modela. Također, sastavljena standardna nesigurnost može se opisati kao standardna nesigurnost mjernog rezultata kad se taj rezultat dobiva iz vrijednosti više drugih veličina jednaka pozitivnom drugom korijenu zbroja članova koji čine varijance i kovarijance tih drugih veličina pomnožene težinskim faktorima koji odražavaju odnos promjene mjernog rezultata prema promjeni tih veličina.

2.12. Povećana nesigurnost

Povećana nesigurnost je produkt sastavljene standardne nesigurnosti i faktora proširenja. Povećana nesigurnosti se može, također, opisati kao veličina koja određuje interval oko mjernog rezultata za koji se može očekivati da obuhvaća velik dio razdiobe vrijednosti koje bi se razumno mogle pripisati mjerenoj veličini.

2.13. Faktor proširenja

Faktor proširenja je brojčani faktor koji se upotrebljava kao množitelj sastavljene standardne nesigurnosti da bi se dobila povećana nesigurnost. Faktor proširenja k obično je vrijednost između 2 i 3.

3. POSTUPAK PRORAČUNAVANJA I ISKAZIVANJA MJERNE NESIGURNOSTI GUM METODOM[2]

3.1. Mjerna nesigurnost

Kao što je već rečeno u poglavlju 2.6. mjerna nesigurnost je parametar pridružen rezultatu mjerenja koji opisuje rasipanje vrijednosti koje bi se razumno moglo pripisati mjerenoj veličini.. Mjerna nesigurnost sastoji se općenito od više sastavnica. Neke od tih sastavnica mogu se odrediti na temelju statističke razdiobe niza mjerenja i mogu se opisati eksperimentalnim standardnim odstupanjima. Druge sastavnice, koje se također mogu opisati standardnim odstupanjima, određuju se iz pretpostavljenih razdioba vjerojatnosti na temelju iskustva ili drugih podataka.

Nesigurnost mjernog rezultata odražava pomanjkanje točnog znanja vrijednosti mjerne veličine. Mjerni je rezultat i nakon ispravka utvrđenih sustavnih djelovanja, zbog nesigurnosti koja potječe od slučajnih djelovanja i zbog nesavršenosti ispravka rezultata zbog sustavnih djelovanja, još uvijek samo procjena vrijednosti mjerne veličine.

Mjerenja nisu savršena kako zbog djelovanja slučajnih utjecaja (trenutna promjena temperature, tlaka i vlage ili neiskustvo mjeritelja, nesavršenost uređaja i osjetila) tako i zbog ograničenih mogućnosti korekcije sustavnih djelovanja (promjena karakteristike instrumenta između dva umjeravanja, utjecaj mjeritelja pri očitavanju analogne skale, nesigurnost vrijednosti referentnog etalona itd.). Mjerna nesigurnost je upravo posljedica djelovanja slučajnih utjecaja i ograničenih mogućnosti korekcije sustavnih djelovanja.

U praksi postoji mnogo mogućih izvora nesigurnosti u mjerenju:

a) Nepotpuno određivanje mjerene veličine
b) Nesavršeno ostvarenje određivanja mjerne veličine
c) Nereprezentativno uzrokovani, izmjereni uzorak ne mora predstavljati točno određenu mjernu veličinu
d) Nedovoljno poznavanje djelovanja uvjeta okoliša na mjerenje ili nesavršeno mjerenje uvjeta okoliša
e) Osobnu pristranost u očitavanju analognih instrumenata

f) Konačno razlučivanje instrumenata ili prag pokretljivosti
g) Netočne vrijednosti mjernih etalona i referentnih tvari
h) Netočne vrijednosti stalnica i drugih parametara dobivenih iz vanjskih izvora i upotrebljavanih u algoritmu za obradu podataka
i) Približna određenja i pretpostavke uključene u mjernu metodu i postupak
j) Promjene opetovanih opažanja mjerne veličine u očigledno istovjetnim uvjetima

Ovi izvori nisu nužno neovisni, pa neki od izvora a) do i) mogu doprinositi izvoru j).

Mjernu nesigurnost procjenjujemo radi nedvosmislenog iskazivanja i usporedbe mjernih rezultata dobivenih u različitim umjernim i ispitnim laboratorijima, te radi usporedbe mjernih rezultata sa specifikacijama proizvođača ili zadanom tolerancijom.

3.2. Procjena mjerne nesigurnosti GUM metodom

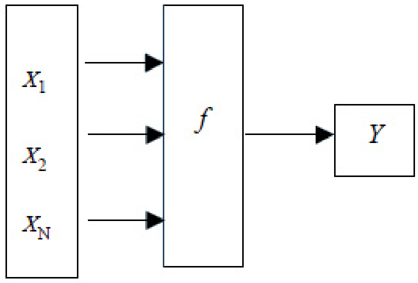
3.2.1. Modeliranje mjerenja

U većini slučajeva mjerena veličina Y ne mjeri se izravno nego se određuje iz N drugih veličina $X_1, X_2,\ldots, X_N$ na temelju funkcijskog odnosa f:

Matematički model mjerenja jedne (skalarne) veličine može se izraziti na temelju tog funkcijskog odnosa f:

$$Y=f(\boldsymbol{X}), \tag{1}$$

gdje vektor $\boldsymbol{X}$ predstavlja N ulaznih veličina $(X_1, X_2,\ldots, X_N)^T$, dok je Y izlazna skalarna veličina. Svaki X_i se promatra kao slučajna varijabla, a njena procjena je x_i. Y je, također, slučajna izlazna varijabla, a njena procjena se označava sa y.



Slika 1: Skalarni odnos između ulaznih veličina i mjerene veličine

Ulazne veličine $X_1, X_2,\ldots, X_N$ o kojima ovisi izlazna veličina Y mogu se same promatrati kao mjerene veličine i smogu same ovisiti o drugim veličinama, uključujući ispravke i faktore ispravka zbog sustavnih djelovanja, dovodeći tako do složenog funkcijskog odnosa f koji se ne mora uvijek može eksplicitno napisati. Funkcija f, može biti određena eksperimentalno ili postojati samo kao kakav algoritam koji se mora brojčano proračunati. Funkciju f treba tumačiti u tom širem smislu, a posebno kao funkciju koja sadrži svaku veličinu uključujući sve ispravke i faktore ispravka, koja može kojom značajnom sastavnicom nesigurnosti doprinijeti mjernom rezultatu.

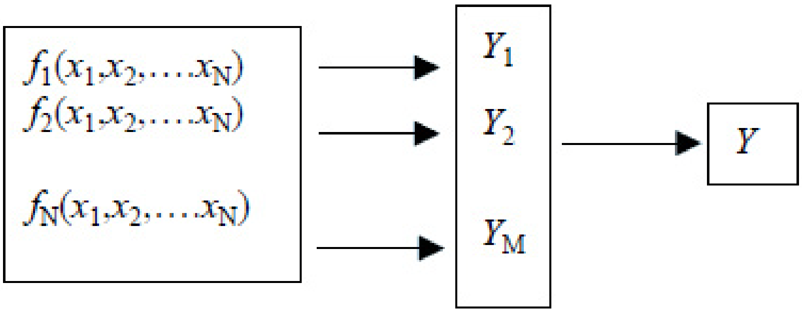
Skup ulaznih veličina $X_1, X_2,\ldots, X_N$ može se svrstati u razrede:

- veličina čije se vrijednosti i nesigurnosti izravno određuju u stvarnom mjerenju. Te se vrijednosti i nesigurnosti mogu dobiti, primjerice, iz kojeg pojedinačnog opažanja, opetovanih opažanja ili prosudbe koja se temelji na iskustvu, a može uključivati određivanje ispravaka očitavanja instrumenta i ispravaka zbog utjecajnih veličina kao što su temperatura okoliša, barometarski tlak i vlažnost.

- veličina čije se vrijednosti i nesigurnosti uvode u mjerenje iz vanjskih izvora kao što su veličine pridružene mjernim etalonima, potvrđenim referentnim tvarima i referentnim podacima dobivenim iz priručnika.

Procjena mjerene veličine Y, koja se označuje s y, dobiva se iz jednadžbe (1) uporabom procjena ulaznih veličina $x_1,x_2,\ldots,x_N$ za vrijednosti tih N veličina $X_1, X_2,\ldots, X_N$. Prema tome, procjena izlazne veličine y tog mjernog rezultata daje se izrazom

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_N), \tag{2}$$



Slika 2: Vektorski odnos između ulaznih veličina i mjerene veličine

U nekim se slučajevima ta procjena y može dobiti i iz izraza:

$$y = \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{Y}_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_{1,k}, X_{2,k}, \ldots, X_{N,k})$$

Kao procjena y uzima se aritmetička sredina ili prosjek n neovisnih određivanja Y_k veličine Y, od kojih svako ima istu nesigurnost i svako se temelji na potpunom skupu opaženih vrijednosti N neovisnih veličina X_i dobivenih u isto vrijeme. Ovom načinu usrednjavanja može se dati prednost kad je f nelinearna funkcija ulaznih veličina $X_1, X_2, \ldots, X_N$ pred usrednjavanjem $y = f(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots, \overline{X}_N)$, gdje je $\overline{X}_i = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_{i,k}}{n}$ aritmetička sredina pojedinačnih opažanja $X_{i,k}$, ali ta su dva pristupa istovjetna ako je f linearna funkcija veličina X_i.

Procijenjeno standardno odstupanje pridruženo procjeni izlazne veličine ili mjernog rezultata y, koje se naziva sastavljenom standardnom nesigurnošću i označuje se $u_c(y)$, određuje se iz procijenjenog standardnog odstupanja pridruženog procjeni ulazne veličine x_i, koje se naziva standardnom nesigurnošću i označuje s $u(x_i)$.

Svaka procjena ulazne veličine x_i i njezina pridružena standardna nesigurnost $u(x_i)$ dobivaju se iz razdiobe mogućih vrijednosti ulazne veličine X_i. Ta razdioba vjerojatnosti može se temeljiti na frekvenciji, tj. na nizu opažanja $X_{i,k}$ veličine X_i, ili to može biti kakva apriorna razdioba. Proračuni sastavnica A-vrste standardne nesigurnosti nalaze se iz funkcije gustoće vjerojatnosti izvedeni iz promatrane distribucije učestalosti ponavljanja , dok se proračuni B-vrste nalaze iz pretpostavljenih funkcija gustoće vjerojatnosti baziranih na stupnju vjerovanja da će se slučaj dogoditi. Mora se shvatiti da su u oba slučaja te razdiobe modeli koji služe za prikaz stanja našeg znanja.

3.2.2. Proračun standardne nesigurnosti A-vrste

Nesigurnost A-tipa određuje se eksperimentalno, ponavljanjem mjerenja. Na temelju rezultata opetovanih mjerenja može se izračunati aritmetička sredina i standardno odstupanje. U većini slučajeva najbolja je raspoloživa procjena očekivanja ili očekivane vrijednosti μ_q veličine q koja se mijenja na slučajan način i za koju je u istim mjernim uvjetima dobiveno n neovisnih opažanja q_k aritmetička sredina ili prosjek q tih n opažanja.

$$\overline{q} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} q_k \tag{3}$$

Prema tome da bi se odredio mjerni rezultat y u jednadžbi za ulaznu se veličinu X_i procijenjenu iz n neovisnih opetovanih opažanja $X_{i,k}$ kao procjena x_i ulazne veličine upotrebljava aritmetička sredina X_i dobivena iz jednadžbe (3); tj. x_i = X_i. Procjene onih ulaznih veličina koje se ne proračunavaju iz opetovanih opažanja, kao što su veličine koje su naznačene u drugom razredu veličina moraju se dobiti drugim metodama.

Pojedinačna opažaja q_k razlikuju se po vrijednosti zbog slučajnih promjena utjecajnih veličina ili slučajnih djelovanja. Eksperimentalna varijanca tih opažanja, koja daje procjenu varijance σ^2 razdiobe vjerojatnosti veličine q, dana je izrazom:

$$s^2(q_k) = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(q_k - \overline{q})^2 \tag{4}$$

Ta procjena varijance i njezin pozitivni drugi korijen $s(q_k)$, koji se naziva eksperimentalnim standardnim odstupanjem, opisuju promjenljivost opaženih vrijednosti q_k ili, točnije, njihovo rasipanje oko njihove srednje vrijednosti q_k.

Najbolja procjena varijance srednje vrijednosti σ^2 ($\overline{q}$) dana je izrazom:

$$u^2(x_i) = s^2(\overline{q}) = \frac{s^2(q_k)}{n} \tag{5}$$

Eksperimentalna varijanca srednje vrijednosti $s^2(\overline{q})$ i eksperimentalno standardno odstupanje srednje vrijednosti $s(\overline{q})$ koje je jednako pozitivnom drugom korijenu iz $s^2(\overline{q})$, količinski određuju mjeru koliko dobro $\overline{q}$ procjenjuje očekivanje μ_q veličine q, a oboje se može upotrebljavati kao mjera nesigurnosti srednje vrijednosti $\overline{q}$.

Na taj je način za ulaznu veličinu X_i određenu iz n neovisnih opetovanih opažanja $X_{i,k}$ standardna nesigurnost $\mu(x_i)$ njezine procjene $x_i = X_i$ uz $s^2(\overline{X}_i)$ izračunano u skladu s jednadžbom (5) jednaka $u(x_i) = s(\overline{X}_i)$. Radi pogodnosti $u^2(x_i) = s^2(\overline{X}_i)$ i $u(x_i) = s(\overline{X}_i)$ katkad se redom nazivaju varijancom A-vrste i standardnom nesigurnošću A-vrste.

Za dobro opisano mjerenje pod statističkim nadzorom može biti raspoloživa sastavljena ili skupna procjena varijance s_p^2 (ili združeno eksperimentalno standardno odstupanje s_p) koja opisuje mjerenje. U takvim slučajevima, kada se vrijednost mjerene veličine q određuje iz n neovisnih opažanja, eksperimentalna varijanca aritmetičke sredine $\overline{q}$ tih opažanja bolje se procjenjuje s pomoću s_p^2/n nego s pomoću $s^2(\overline{q})/n$, a standardna je nesigurnost jednaka $u = s_p / \sqrt{n}$.

3.2.3. Proračun standardne nesigurnosti B-vrste

Za procjenu x_i ulazne veličine X_i koja nije dobivena iz opetovanih opažanja pridružena procjena varijance $u^2(x_i)$ ili standardna nesigurnost $u(x_i)$ proračunava se znanstvenom prosudbom koja se temelji na svim raspoloživim podacima o mogućoj promjenljivosti X_i.

Takav skup podataka može uključivati:

- prijašnje mjerne podatke
- iskustvo s tvarima i instrumentima ili opće poznavanje ponašanja i svojstava bitnih tvari i instrumenata
- proizvođačke specifikacije
- podatke dane u potvrdama o umjeravanju i drugim potvrdama

- nesigurnosti dodijeljene referentnim podacima uzetim iz priručnika.

Radi pogodnosti na ovaj način proračunane $u^2(x_i)$ i $u(x_i)$ katkad se nazivaju redom varijancom B-vrste i standardnom nesigurnošću B-vrste.

Ispravna uporaba skupa raspoloživih podataka za proračun standardne nesigurnosti B-vrste zahtijeva sposobnost opažanja koja se temelji na iskustvu i općem znanju, a to je vježba koja se jedino praksom može naučiti.

Postoje nekoliko slučajeva procjene i izračuna standardne nesigurnosti B-vrste, od kojih su svi podjednako točni, te ne postoji klasifikacija procjene prema kvaliteti proračuna, već ovise o načinu iskaza.

Jedan od slučajeva je da se procjena x_i uzima se iz proizvođačeve specifikacije, potvrde o umjeravanju, priručnika ili drugog izvora. Kod ovog tipa podataka, iskazana nesigurnost navodi se kao poseban višekratnik standardnog odstupanja. Standardna nesigurnost $u(x_i)$ tada je jednostavno jednaka navedenoj vrijednosti podijeljenoj tim množiteljem, a procijenjena je varijanca $u^2(x_i)$ jednaka drugom korijenu tog količnika.

U drugom slučaju može se tvrditi da navedena nesigurnost određuje interval koji ima razinu povjerenja od 90, 95 ili 99%. Ako nije drugačije naznačeno pretpostavlja se da je za izračunavanje navedene nesigurnosti upotrijebljena normalna razdioba. Dijeljenjem navedene nesigurnosti odgovarajućim faktorom za normalnu razdiobu natrag može se dobiti standardna nesigurnost procjene x_i. Faktori koji odgovaraju trima gornjima razinama mogu se preuzeti iz tablice 1.

Tablica 1: Vrijednost faktora proširenja k_p koji uz pretpostavku normalne razdiobe daje interval povjerenja koji ima razinu povjerena p

Razina povjerenja p (%)	Faktor proširenja k_p
68,27	1
90	1,645
95	1,960
95,45	2
99	2,576
99,73	3

U nekim slučajevima procjena se zasniva na apriornim razdiobama vjerojatnosti. Tada je moguće procijeniti samo granice (gornju i donju) veličine X_i. Kod ovog slučaja najčešće se javlja pravokutna razdioba, za koju postoji 100% vjerojatnost da x_i leži unutar granica a_- i a_+, a 0% izvan tog intervala. Tada je očekivana vrijednost veličine X_i jednako središtu tog intervala:

$$x_i = (a_- + a_+)/2 \tag{6}$$

a pripadna varijanca jest:

$$u^2(x_i) = (a_+ - a_-)^2/12 \tag{7}$$

U posebnom slučaju kada su granice intervala simetrične, tj. kada vrijedi $a_+ - a_- = 2a$, tada jednadžba (7) postaje:

$$u^2(x_i) = a^2/3 \tag{8}$$

3.2.4. Određivanje sastavljene standardne nesigurnosti

I) Nekorelirane ulazne veličine

Ovaj odlomak obrađuje slučaj gdje su sve ulazne veličine neovisne. O slučaju kad su dvije ili više veličina povezane, tj. kad su međuovisne ili korelirane govorit će se u idućem dijelu.

Standardna nesigurnost veličine *y*, gdje je *y* procjena mjerene veličine *Y*, pa prema tome i mjernog rezultata, dobiva se odgovarajućim sastavljanjem standardnih nesigurnosti procjena ulaznih veličina $x_1, x_2, \ldots, x_N$. Ta sastavljena standardna nesigurnost procjene *y* označuje se s $u_c(y)$.

Sastavljena je standardna nesigurnost $u_c(y)$ pozitivan drugi korijen sastavljene varijance $u_c^2(y)$ koja je dana izrazom:

$$u_c^2(y) = (\frac{\partial f}{\partial x_i})^2 u^2(x_i) \tag{9}$$

gdje je funkcija *f* dana jednadžbom (1). Svako $u(x_i)$ standardna je nesigurnost proračuna prema opisu A ili B-vrste. Sastavljena standardna nesigurnost $u_c(y)$ procjena je standardnog odstupanja i opisuje rasipanje vrijednosti koje bi se razumno mogle pripisati mjernoj veličini *Y*.

Sastavljena varijanca $u_c^2(y)$ može se promatrati kao zbroj članova od kojih svaki predstavlja procijenjenu varijancu pridruženu procjeni izlazne veličine proizvedene procijenjenom varijancom pridruženom svakoj procjeni x_i ulazne veličine. To navodi da se jednadžba (9) napiše u obliku:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{n} \left[c_i u(x_i)\right]^2 \equiv \sum_{i=1}^{N} u_i^2(y) \tag{10a}$$

gdje je

$$c_i \equiv \partial f / \partial x_i, \quad u_i(y) \equiv |c_i| u(x_i) \tag{10b}$$

Ako se jednadžba (1) za mjerenu veličinu Y razvije oko nazivnih vrijednosti $X_{i,0}$ ulaznih veličina X_i, tada je za razvoj do članova prvog reda $Y = Y_0 + c_1\delta_1 + c_2\delta_1 + \ldots + c_N\delta_N$, gdje su $Y_0 = f(X_{1,0}, X_{2,0}, \ldots, X_{N,0})$, $c_i = \left(\partial f / \partial X_i\right)$ izračune u $X_i = X_{i,0}$ i $\delta_i = X_i - X_{i,0}$.

Dakle za potrebe analize nesigurnosti mjerena se veličina transformacijom njezinih ulaznih veličina od X_i na i obično približuje linearnom funkcijom njezinih varijabla.

Ako Y ima oblik $Y = cX_1^{p_1} X_2^{p_2} \ldots X_N^{p_N}$ ako su eksponenti p_i poznati pozitivni ili negativni brojevi koji imaju zanemarive nesigurnosti, sastavljena varijanca može se izraziti kao

$$\left[u_c(y)/y\right]^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[p_i u(x_i)/x_i\right]^2 \tag{11}$$

II) Korelirane ulazne veličine

Jednadžba (9) i iz nje izvedene jednadžbe, kao što su (10) i (11), vrijede samo ako su ulazne veličine neovisne ili nekorelirane (slučajne varijable, a ne fizičke veličine za koje se podrazumijeva da su invarijante). Ako su neke od veličina X_i značajno korelirane, u račun se moraju uzeti i te korelacije.

Kada su ulazne veličine korelirane odgovarajući izraz za sastavljenu varijancu $u_c^2(y)$ pridruženu mjernom rezultatu glasi:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j) = \sum_{I=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j) \tag{12}$$

gdje su x_i i x_j procjene veličina X_i i X_j, a $u(x_i, x_j) = u(x_j, x_i)$ procijenjena je kovarijanca pridružena procjenama x_i i x_j. Stupanj korelacije između x_i i x_j opisuje se procijenjenim koeficijentom korelacije

$$r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i)u(x_j)} \tag{13}$$

S pomoću korelacijskih koeficijenata, koji se lakše shvaćaju nego kovarijance, kovarijancijski član jednadžbe (9) može se napisati kao:

$$2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i-+1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}u(x_i)u(x_j)r(x_i,x_j) \tag{14}$$

Jednadžba 12 tada s pomoću jednadžbe 10b postaje:

$$u_c^2(y)=\sum_{i=1}^{N}c_i^2u^2(x_i)+2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i-+1}^{N}c_ic_ju(x_i)u(x_j)r(x_i,x_j) \tag{15}$$

3.2.5. Određivanje povećane nesigurnosti

Dodatna mjera nesigurnosti koja zadovoljava zahtjev za osiguranje kojeg intervala te vrste naziva se povećanom nesigurnošću i označuje s U. Povećana nesigurnost dobiva se množenjem složene standardne nesigurnosti $u_c(y)$ s faktorom proširenja k:

$$U = ku_c(y) \tag{16}$$

Mjerni rezultat tada se dogovorno izražava kao $Y = y \pm U$, čime se želi reći da je y najbolja procjena vrijednosti koja se može pripisati mjerenoj veličini Y i da je $y - U$ do $y + U$ interval za koji se može očekivati da obuhvaća velik dio razdiobe vrijednosti koje bi se mogle razumno pripisati veličini Y. Takav interval također se izražava kao

$$y - U \leq Y \leq y + U \tag{17}$$

3.3. Iskazivanje faktora proširenja u GUM metodi

Vrijednost faktora proširenja k bira se na temelju zahtijevane razine povjerenja za interval y-U do y+U. Općenito k će biti u području između 2 i 3. Međutim, za posebne primjene k može biti i izvan tog područja. Izbor prave vrijednosti za k može olakšati široko iskustvo s potpunim znanjem primjena koje će se postavljati na mjerni rezultat.

U najboljem slučaju, željelo bi se moći odabrati posebnu vrijednost faktora proširenja k koja bi osiguravala da interval $Y = y \pm U = y \pm ku_c(y)$ odgovara posebna razina povjerenja p, kao npr. 95 ili 99%; isto tako, željelo bi se za određenu vrijednost k jednoznačno navesti razinu povjerenja pridruženu tom intervalu. Međutim, to u praksi nije lako učiniti jer zahtjeva dobro poznavanje razdiobe vrijednosti koju opisuju mjerni rezultat y i njegova sastavljena nesigurnost $u_c(y)$. Premda su ti parametri od odlučne važnosti, oni sami nisu dostatni za utvrđivanje intervala s točno poznatim razinama povjerenja.

Ovo poglavlje je usmjereno na opće pitanje određivanja faktora proširenja k koji tvori interval oko mjernog rezultata y za koji se može očekivati da obuhvaća točno određen dio p razdiobe vrijednosti koje bi se opravdano mogle pripisati mjernoj veličini Y.

Da bi se dobila vrijednost faktora proširenja k koji daje interval koji odgovara točno određenoj razini povjerenja p, zahtjeva se iscrpno poznavanje razdiobe vjerojatnosti koju opisuje mjerni rezultat i njegova sastavljena standardna nesigurnost. Ako su poznate razdiobe vjerojatnosti ulaznih veličina $X_1, X_2, \ldots, X_N$ o kojima ovisi mjerena veličina Y i ako je Y linearna funkcija tih ulaznih veličina $Y = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \ldots + c_N X_N$, razdioba vjerojatnosti veličine Y tada se može dobiti konvolucijom tih pojedinačnih razdioba vjerojatnosti. Vrijednost faktora proširenja k tada se može izračunati iz konačne konvolucijom dobivene razdiobe. No, u praksi, kada se trebaju izračunati intervali koji imaju točno određene razine povjerenja, takve konvolucije se rijetko ili uopće ne primjenjuju. Umjesto toga upotrebljavaju se približenja u kojima se rabi središnji granični teorem.

3.3.1. Središnji granični teorem

Ako je $Y = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \ldots + c_N X_N = \sum_{i=1}^{N} c_i X_i$ i ako se sve veličine X_i opisuju normalnim razdiobama, i konačna konvolucijom dobivena razdioba veličine Y bit će također normalna. Međutim, čak i ako razdiobe veličina X_i nisu normalne, razdioba veličine Y može se, zbog središnjeg graničnog teorema, često približno opisati normalnom razdiobom. Taj teorem tvrdi da će razdioba veličine Y biti približno normalna s očekivanjem $E(Y) = \sum_{i=1}^{N} c_i E(X_i)$ i varijancom $\sigma^2(Y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 \sigma^2(X_i)$, gdje je $E(X_i)$ očekivanje veličine X_i, a $\sigma^2(X_i)$ varijanca veličina X_i, ako su veličine X_i neovisne i ako je varijanca $\sigma^2(Y)$ mnogo veća od svake pojedinačne sastavnice $c_i^2 \sigma^2(X_i)$ nenormalno raspodijeljene veličine X_i.

Središnji granični teorem je značajan jer pokazuje veoma važnu ulogu koju u određivanju oblika konačne konvolucijom dobivene razdiobe veličine Y igraju varijance razdioba vjerojatnosti ulaznih veličina u usporedbi s ulogom koju igraju viši momenti tih razdioba. Praktična je posljedica središnjeg graničnog teorema, da je za proračun povećane nesigurnosti $U_p = ku_c(y)$, koja daje interval s razinom povjerenja p, uporaba vrijednosti iz normalne razdiobe za faktor proširenja k, opravdano prvo približenje.

3.3.2. Stvarni broj stupnjeva slobode

Ukoliko je potrebno dobiti približenje bolje nego jednostavnom uporabom za faktor proširenja *k* dobivenog iz tablice 1. tada treba proračunati stvarni broj stupnjeva slobode. Mora se uočiti da je za proračun kojeg intervala koji ima određenu razinu povjerenja potrebna ne razdioba varijable nego razdioba varijable . To je zato jer sve što je u praksi moguće upotrijebiti jesu *y*, procjena veličine *Y* dobivena iz izraza $y = \sum_{i=1}^{N} c_i x_i$,te sastavljena varijanca pridružena procjeni *y*, dobivena iz izraza $u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i)$. Ako je $u_c^2(y)$ zbroj dviju ili više procijenjenih sastavnica varijance $u_i^2(y) = c_i^2 u^2(x_i)$, čak i ako je svako x_i procjena normalno raspodijeljene ulazne veličine X_i, tada se razdioba te varijable može približno opisati t-razdiobom sa stvarnim brojem stupnjeva slobode v_{eff} dobivenim iz Welch-Satterthwaiteove formule:

$$\frac{u_c^4(y)}{v_{eff}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^4(y)}{v_i} \tag{18}$$

ili

$$v_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^4(y)}{v_i}} \tag{19}$$

s

$$v_{eff} \leq \sum_{i=1}^{N} v_i \tag{20}$$

gdje je $u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} u_i^2(y)$. Povećana nesigurnost $U_p = ku_c(y) = t_p(v_{eff})u_c(y)$ tada daje interval $Y = y \pm U_p$ koji ima približnu razinu povjerenja *p*.

Tablica 2: Vrijednost faktora $t_p(v)$ iz t-razdiobe za broj stupnjeva slobode v

Broj stupnjeva slobode *v*	Dio *p* u postocima					
	67,27	90	95	95,45	99	99,73
1	1,84	6,31	12,71	13,97	63,66	235,80
2	1,32	2,92	4,30	4,53	9,92	19,21
3	1,20	2,35	3,18	3,31	5,84	9,22
4	1,14	2,13	2,78	2,87	4,60	6,62
5	1,11	2,02	2,57	2,65	4,03	5,51
6	1,09	1,94	2,45	2,52	3,71	4,90
7	1,08	1,89	2,36	2,43	3,50	4,53
8	1,07	1,86	2,31	2,37	3,36	4,28
9	1,06	1,83	2,26	2,32	3,25	4,09
10	1,05	1,81	2,23	2,28	3,17	3,96
11	1,05	1,80	2,20	2,25	3,11	3,85
12	1,04	1,78	2,18	2,23	3,05	3,76
13	1,04	1,77	2,16	2,21	3,01	3,69
14	1,04	1,76	2,14	2,20	2,98	3,64
15	1,03	1,75	2,13	2,18	2,95	3,59
16	1,03	1,75	2,12	2,17	2,92	3,54
17	1,03	1,74	2,11	2,16	2,90	3,51
18	1,03	1,73	2,10	2,15	2,88	3,48
19	1,03	1,73	2,09	2,14	2,86	3,45
20	1,03	1,72	2,09	2,13	2,85	3,42
25	1,02	1,71	2,06	2,11	2,79	3,33
30	1,02	1,70	2,04	2,09	2,75	3,27
35	1,01	1,70	2,03	2,07	2,72	3,23
40	1,01	1,68	2,02	2,06	2,70	3,20
45	1,01	1,68	2,01	2,06	2,69	3,18
50	1,01	1,68	2,01	2,05	2,68	3,16
100	1,005	1,660	1,984	2,025	2,626	3,077
∞	1,000	1,645	1,960	2,000	2,576	3,000

Da bi se iz jednadžbe (19) dobio stvarni broj stupnjeva slobode v_{eff} zahtjeva se za svaku sastavnicu standardne nesigurnosti broj stupnjeva slobode v_i. Za sastavnicu dobivenu iz proračuna A-vrste v_i se dobiva iz niza neovisnih opetovanih opažanja na kojima se temelji procjena ulazne veličine i nizu neovisnih veličina određenih iz tih opažanja . Za sastavnicu dobivenu iz proračuna B-vrste v_i se dobiva iz prosuđene pouzdanosti vrijednosti te sastavnice.

Za pojedinu veličinu procijenjenu s pomoću aritmetičke sredine od n neovisnih opažanja broj stupnjeva slobode jednak je $n - 1$. Ako se za određivanje nagiba i presjeka pravca metodom najmanjih kvadrata rabi n neovisnih opažanja, broj stupnjeva slobode njegove standardne nesigurnosti jednak je $v = n - 2$. Za prilagođenje m parametara podacima koji su prikazani s n točaka metodom najmanjih kvadrata broj stupnjeva slobode standardne nesigurnosti svakog parametra jednak je $v = n - m$.

Za određivanje broja stupnjeva slobode koji treba pripisati standardnoj nesigurnosti dobivenoj iz proračuna B-vrste, kad se proračunava stvarni broj stupnjeva slobode, može se upotrijebiti:

$$v_i \approx \frac{1}{2}\frac{u^2(x_i)}{\sigma^2\left[u(x_i)\right]} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta u(x_i)}{u(x_i)}\right)^{-2} \tag{21}$$

Veličina u velikim zagradama razmjerna je nesigurnosti $u(x_i)$; za proračun nesigurnosti B–vrste to je subjektivna veličina čija se vrijednost dobiva znanstvenom prosudbom koja se temelji na skupu dostupnih podataka.

4. POSTUPAK PROCJENE I ISKAZIVANJA MJERNE NESIGURNOSTI MCS METODOM[3]

Kao što je već rečeno u poglavlju 3.2.1. matematički model mjerenja jedne (skalarne) veličine se može izraziti kao u (1) kao funkcijski odnos f, gdje je Y skalarna izlazna veličina, a $\boldsymbol{X}$ predstavlja N ulaznih veličina $(X_1,\ldots,X_N)^{\mathrm{T}}$. Svaki X_i se smatra kao slučajna varijabla sa mogućom vrijednošću ξ_i i očekivanjem x_i. Također, Y je slučajna varijabla sa mogućom vrijednošću η, te očekivanjem y.

Kako ne bi došlo do zabune, za funkciju gustoće vjerojatnosti koristi se simbol g, dok se za funkciju razdiobe koristi simboli G. Simbol f se uvijek odnosi na funkciju modela.

Kada se govori o jediničnim veličinama, ili skalarima oni se obilježavaju normalnim kurzivom, dok se vektori obilježavaju masno otisnutim kurzivom. Na primjer već prije spomenuta ulazna veličina X se odnosi na jediničnu ili skalarnu vrijednost, dok se $\boldsymbol{X}$ odnosi na ulazni vektor.

4.1. Osnovna načela

4.1.1. Glavne faze procijene nesigurnosti

1. Postavljanje problema:

    a. Definiranje izlazne veličine, odnosno veličine koja se treba mjeriti;

    b. Određivanje ulaznih veličina o kojima izlazne veličine ovise;

    c. Postaviti model koji povezuje izlazne veličine sa ulaznim veličinama;

    d. Prema dostupnom znanju dodijeliti funkciju gustoće vjerojatnosti (normalna, pravokutna, trokutna) ulaznim veličinama;

2. Proširenje razdiobe:

    a. Proširiti funkciju gustoće vjerojatnosti ulaznih veličina uz pomoć modela kako bi se odredila funkcija gustoće vjerojatnosti izlazne veličine;

3. Sažetak:

    Koristeći funkciju gustoće vjerojatnosti izlaznih veličina odrediti:

    a. Očekivanje izlazne veličine, uzetu kao procjenu te veličine;

    b. Standardno odstupanje izlazne veličine, uzetu kao standardnu nesigurnost povezanu sa procjenom;

    c. Interval proširenja koji uključuje izlaznu veličinu sa unaprijed određenom vjerojatnošću.

Jednom kada se završi faza postavljanja problema, funkcija gustoće vjerojatnosti izlazne veličine iz faze proširenja se postavlja matematički, dok se faza sažetka određuje numeričkim metodama koje uključuju određeni stupanj aproksimacije.

4.1.2. Proširenje razdiobe

Definicija funkcije gustoće vjerojatnosti izlaznih veličina Y je dana izrazom:

$$g_Y(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g_X(\xi)\delta(\eta - f(\xi))d\xi_N \cdots d\xi_1, \tag{22}$$

gdje δ( ) označava Dirac-ovu delta funkciju.

S obzirom na dvostruki integral, (22) se ne može izračunati analitički. Pravilo numeričke integracije se može upotrijebiti kako bi se dobila aproksimacija $g_Y(\eta)$, no to nije efikasan pristup.

Definicija razdiobne funkcije $G_Y(\eta)$ dana je izrazom:

$$G_Y(\eta) = \int_{-\infty}^{\eta} g_Y(z)dz, \tag{23}$$

Jednadžba (23) daje vrlo pouzdan pristup određivanju numeričke aproksimacije razdiobne funkcije.

Proširenje razdiobe se provodi jednom od slijedećih metoda:

a) analitičkom metodom koja koristi matematički prikaz funkcije gustoće vjerojatnosti

b) GUM metodom zamjenjivanjem modela aproksimacijom Taylorovim nizom prvog reda

c) GUM metodom zamjenjivanjem modela aproksimacijom Taylorovim nizom višeg reda

d) numeričkom metodom korištenjem Monte Carlo metode

Adekvatna metoda se mora izabrati u fazi proširenja. Ukoliko se može dokazati da GUM metoda daje ispravne rezultate, tada se taj pristup može koristiti. Ukoliko postoje dokazi ili opravdana sumnja da GUM metoda neće dati ispravne rezultate, treba se prikloniti drugom pristupu. U sva tri slučaja alternativna Monte Carlo metoda se može koristiti kao jednostavnije i u većini slučajeva točnije rješenje.

4.1.3. Informacije sažetka

Procjena izlazne veličine Y se izražava kao očekivanje E(Y). Standardna nesigurnost pridružena procjeni se izražava kao standardno odstupanje – pozitivan drugi korijen varijance V(Y).

Interval proširenja izlazne veličine Y se može odrediti iz razdiobne funkcije $G_Y(\eta)$. Označimo li α kao numeričku vrijednost između nule i 1 -p, gdje p predstavlja unaprijed određenu vjerojatnost proširenja. Krajnje točke intervala proširenja 100p% izlazne veličine Y su:

$G_Y^{-1}(\alpha)$ i $G_Y^{-1}(p + \alpha)$.

Izbor α = (1-p)/2 daje interval proširenja definiran sa (1-p)/2 i (1+p)/2, ostvarujući tako simetrični interval proširenja 100p%. Ukoliko je funkcija gustoće vjerojatnosti izlazne veličine Y simetrična oko procjene y, interval proširenja bi bio identičan sa $y \pm U$ iz GUM metode (poglavlje 3.2.5.).

Izbor neke druge numeričke vrijednosti α je prikladan ako je funkcija gustoće vjerojatnosti asimetrična. U tom slučaju se koristi najkraći interval proširenja 100*p*%, o tome će biti više govora u poglavlju 4.5.

4.1.4. Monte Carlo pristup

Metoda Monte Carlo pruža općeniti pristup dobivanja numeričku aproksimaciju *G*. Glavni princip dobivanja aproksimacije jest ponovljeno skupljanje funkcije gustoće vjerojatnosti za X_i, te procjenu modela u svakom slučaju skupljanja.

Kako $G_Y(\eta)$ pruža sve informacije o *Y*, svako obilježje vrijednosti *Y*, kao očekivanje, varijanca i interval proširenja, se može aproksimirati koristeći *G*.

Ako y_r, $r = 1,\ldots,M$ predstavlja vrijednosti modela *M* nezavisno prikupljenih iz razdiobe vjerojatnosti izlazne varijable Y, tada se njezino očekivanje E(*Y*), i varijanca V(*Y*) može aproksimirati koristeći vrijednost y_r.

Svaki y_r dobiva se slučajnim skupljanjem iz funkcije gustoće vjerojatnosti za ulazni parametar X_i, te procjenom modela iz sakupljenih vrijednosti.

Primarna izlazna funkcija ***G*** je sačinjena od y_r svrstanih u rastućem poretku.

Metoda Monte Carlo se može navesti prema sljedećim koracima:

a) Odabrati broj *M* ispitivanja koji će biti učinjeni.

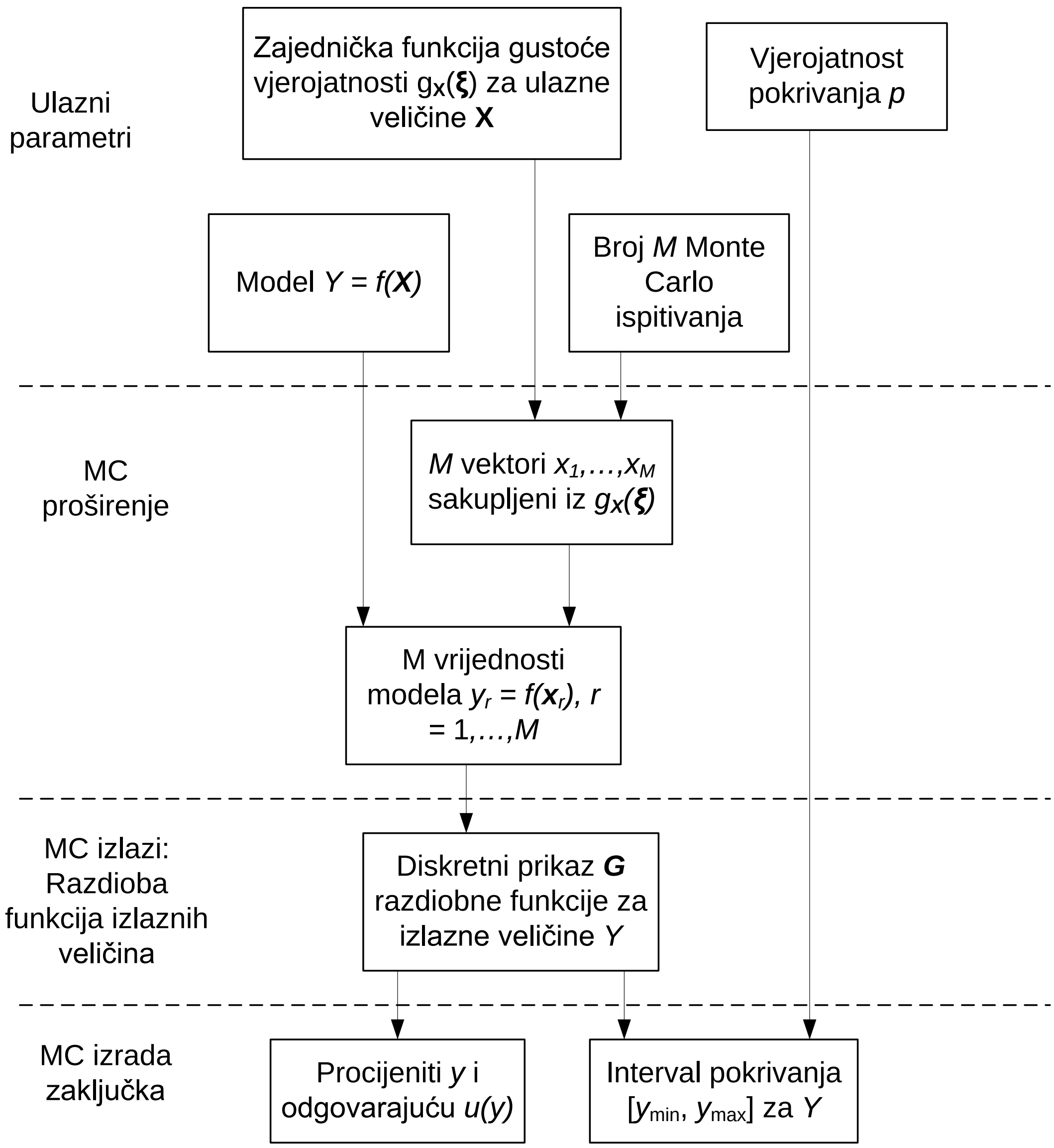
b) Proizvesti M vektore, skupljanjem iz dodijeljenih funkcija gustoće vjerojatnosti kao izvedba ulaznih veličina X_i.

c) Za svaki vektor *M*, iz odgovarajućeg modela vrijednosti *Y*, dobiti vrijednosti modela *M*.

d) Sortirati vrijednosti modela *M* u ne rastućem redoslijedu, kako bi odredili ***G***.

e) Koristeći ***G*** procijeniti *y*, te standardnu nesigurnost *u(y)*.

f) Koristeći ***G*** izraditi odgovarajući interval proširenja za *Y*, prema utvrđenoj vjerojatnosti proširenja *p*.



Slika 3: Faza proširenja i sažetka metode Monte Carlo

4.1.4. Uvjeti za valjano provođenje Monte Carlo metode

Razdiobe faze proširenja se mogu ispravno koristiti, te se informacije zaključka naknadno odrediti, samo ako su sljedeći uvjeti zadovoljeni:

a) funkcija $f(X)$ mora biti neprekinuta u svim svojim dijelovima

b) funkcija razdiobe za Y, također, neprekinuta i isključivo u rastućem poretku

c) funkcija gustoće vjerojatnosti za *Y* mora biti neprekinuta u intervala za koji je funkcija isključivo pozitivna i isključivo u rastućem poretku lijevo od moda ili isključivo u padajućem poretku desno od moda, te mora imati jedan ekstrem (vrh)

d) očekivanje i varijanca moraju postojati

e) dovoljno velika količina broja pokusa *M* se mora koristiti

4.2. Funkcije gustoće vjerojatnosti

U slijedećem poglavlju je opisano kako se količinama dodjeljuju funkcije gustoće vjerojatnosti prema raznim tipovima informacija vezanim za te količine. Za svaku funkciju gustoće vjerojatnosti $g_x(\xi)$ su dane formule očekivanja i varijance.

Pravokutna razdioba

Ako su jedine poznate informacije u svezi sa veličinom *X* donja i gornja granica (a, b) sa pretpostavkom da je $a < b$, tada se pravokutna razdioba R(a, b) za interval [a, b] pripisuje ulaznoj varijabli *X*.

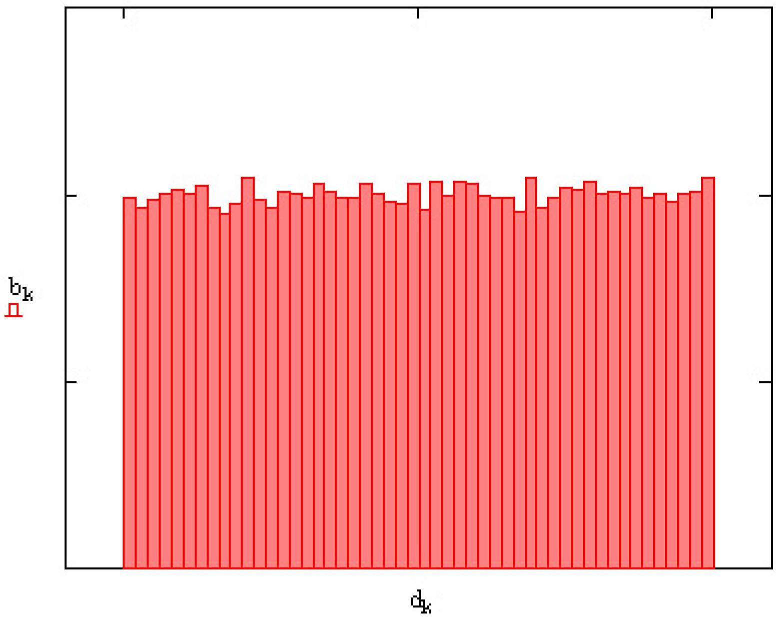
Funkcija gustoće vjerojatnosti ulazne veličine *X* je:

$$g_X(\xi) = 1 / (b - a), \quad a \leq \xi \leq b, \quad \text{odnosno}$$

$$g_X(\xi) = 0, \quad \text{u svim drugim slučajevima}$$

Ulazna veličina *X* ima očekivanje i varijancu:

$$\mathrm{E}(X) = (a+b)/2, \qquad \mathrm{V}(X) = (b-a)^2/12$$



Slika 4: Pravokutna razdioba

Pravokutna razdioba sa netočno opisanim granicama

Za veličinu *X* je poznato da leži unutar granica A i B, te da je A < B. Uz to je poznato da središte (A+B)/2 intervala fiksno, te da duljina B – A intervala nije točno poznata. Poznato je da granica A leži u intervalu a±d, dok B leži u intervalu b±d, gdje su a, b i d određene. Također je poznato da je d>0, te a+d<b-d. Ukoliko druge informacije vezane za X, A i B nisu navedene, tada se ulaznoj varijabli X pripisuje pravokutna razdioba sa netočno opisanim granicama.

Funkcija gustoće vjerojatnosti ulazne veličine *X* je:

$$g_x(\xi) = \frac{1}{4d}\ln\left[(w+d)/(x-\xi)\right], \qquad a-d \le \xi \le a+d$$

$$g_x(\xi) = \frac{1}{4d}\ln\left[(w+d)/(w-d)\right], \qquad a+d \le \xi \le b-d$$

$$g_x(\xi) = \frac{1}{4d}\ln\left[(w+d)/(\xi-x)\right], \qquad b-d \le \xi \le b+d$$

$$g_x(\xi) = 0\,, \qquad \text{u svim drugim slučajevima}$$

gdje su $x = (a+b)/2$ i $w = (b-a)/2$ srednje vrijednosti intervala $[a,b]$. Ova funkcija gustoće vjerojatnosti je trapezna, ali krakovi joj nisu ravne linije.

Ulazna veličina *X* ima očekivanje i varijancu:

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \qquad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} + \frac{d^2}{9}$$

Trapezna razdioba

Pretpostavimo li da je veličina *X* definirana kao zbroj dvije neovisne veličine X_1 i X_2. Ukoliko su veličinama X_1 i X_2 pridružene pravokutne razdiobe $R(a_i,b_i)$ sa granicama a_i i b_i. Tada je veličini X pridružena simetrična trapezna razdioba Trap(a, b, β) gdje je

$$a = a_1 + a_2, \qquad b = b_1 + b_2, \qquad \beta = \tfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

gdje je

$$\lambda_1 = \left| \frac{(b_1 - a_1) - (b_2 - a_2)}{2} \right|, \qquad \lambda_2 = \frac{b-a}{2} \text{ i } \quad \lambda_1 \le \lambda_2$$

Funkcija gustoće vjerojatnosti ulazne veličine *X* je:

$$g(\xi) = (\xi - x + \lambda_2)/(\lambda_2^2 - \lambda_1^2), \qquad x - \lambda_2 \le \xi \le x - \lambda_1$$

$$g(\xi) = 1/(\lambda_1 + \lambda_2), \qquad x - \lambda_1 \le \xi \le x + \lambda_1$$

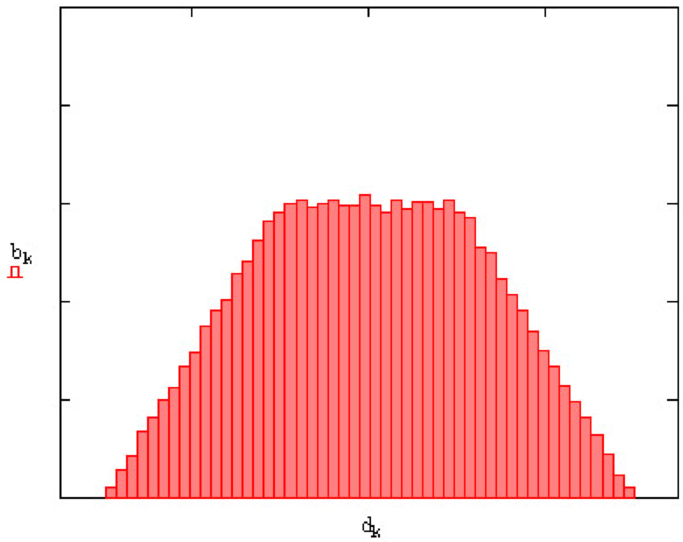
$$g(\xi) = (x + \lambda_2 - \xi)/(\lambda_2^2 - \lambda_1^2), \qquad x + \lambda_1 \le \xi \le x + \lambda_2$$

$$g(\xi) = 0, \qquad \text{u svim drugim slučajevima}$$

gdje je $x = (a+b)/2$

Ulazna veličina *X* ima očekivanje i varijancu:

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \qquad V(X) = \frac{(b-a)^2}{24}\left(1+\beta^2\right)$$



Slika 5: Trapezna razdioba

Trokutna razdioba

Ako je veličina *X* definirana kao suma dvije nezavisne veličine, te je svakoj pridružena pravokutna razdioba, ali sa jednakim polu-širinama $b_1 - a_1 = b_2 - b_2$.

Funkcija gustoće vjerojatnosti ulazne veličine *X* je:

$$g_X(\xi) = (\xi - a)/\omega^2, \qquad a \le \xi \le x,$$

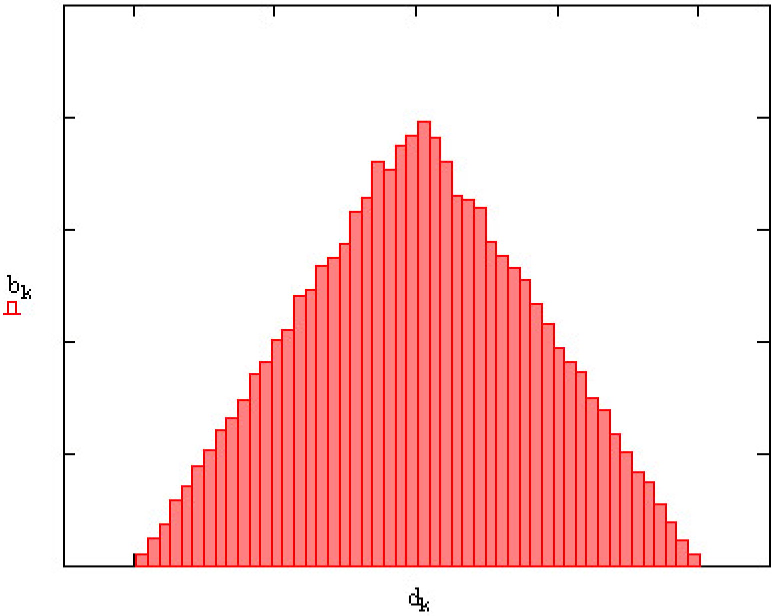
$$g_X(\xi) = (b - \xi)/\omega^2, \qquad x \le \xi \le b,$$

$g_X(\xi) = 0,$ u svim drugim slučajevima

gdje je $x = (a+b)/2$ i $\omega = \lambda_2 = (b - a)/2$

Veličina *X* ima očekivanje i varijancu:

$$E(X) = (a+b)/2, \qquad V(X) = (b-a)^2/24$$



Slika 6: Trokutna razdioba

U razdioba

Ako je za veličinu X poznato da kruži sinusoidno sa nepoznatom fazomΦ, između određenih granica a i b, sa a<b, tada se pravokutna razdioba R(0,2π) pridružuje fazi Φ. Razdioba koja se pridružuje veličini X je U razdioba U(a,b).

$$X = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \sin \Phi$$

gdje Φ ima pravokutnu razdiobu R(0,2π).

Funkcija gustoće vjerojatnosti ulazne veličine *X* je:

$$g_x(\xi) = \frac{2}{\pi}\left[(b-a)^2 - (2\xi - a - b)^2\right]^{-1/2}, \qquad a \le \xi \le b \text{ a}$$

$$g_x(\xi) = 0, \qquad \text{u svim drugim slučajevima.}$$

Veličina *X* ima očekivanje i varijancu:

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \qquad V(X) = \frac{(b-a)^2}{8}$$

Normalna razdioba

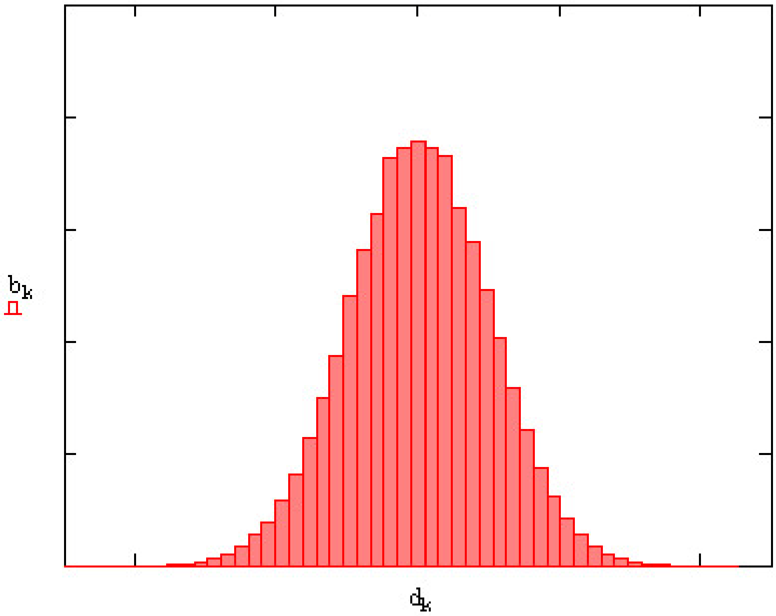
Ako su najbolja procjena *x* i njoj pripadajuća standardna nesigurnosti *u(x)* jedine informacije u svezi veličine *X*, tada se veličini *X* pridružuje normalna (Gaussova) razdioba $N(x, u^2(x))$.

Funkcija gustoće vjerojatnosti ulazne veličine *X* je:

$$g_x(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}u(x)} \exp\left(-\frac{(\xi - x)^2}{2u^2(x)} \right)$$

Veličina *X* ima očekivanje i varijancu:

$$E(X) = x, \qquad V(X) = u^2(x)$$



Slika 7: Normalna razdioba

Eksponencijalna razdioba

Ukoliko je jedina dostupna informacija vezana za ne-negativnu veličinu X najbolja procjena x>0, tada će veličini X biti pridružena eksponencijalna razdioba Ex(1/x)

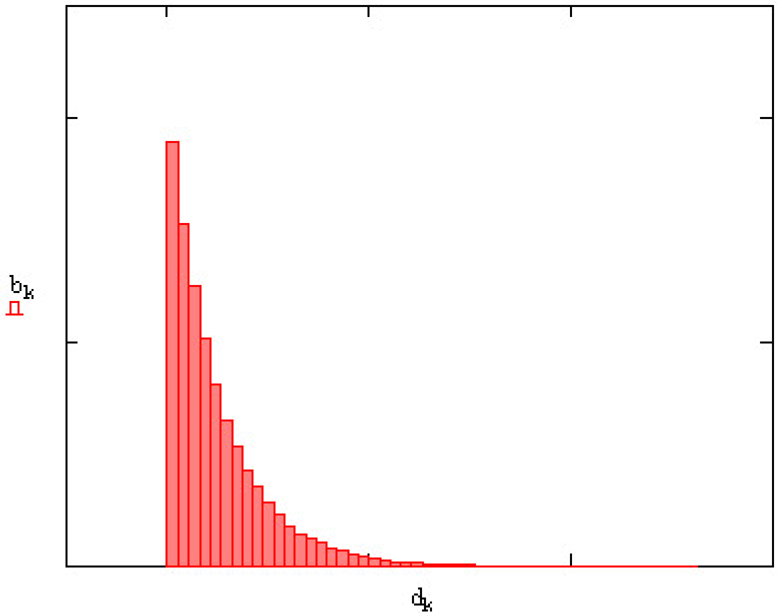
Funkcija gustoće vjerojatnosti ulazne veličine *X* je:

$$g_x(\xi) = \exp(-\xi / x) / x, \qquad \xi \geq 0$$

$$g_x(\xi) = 0, \qquad \text{u svim drugim slučajevima.}$$

Veličina X ima očekivanje i varijancu:

$$E(X) = x, \qquad V(X) = x^2$$



Slika 8: Eksponencijalna razdioba

4.3. Broj pokusa

Vrijednost M, broja Monte Carlo pokusa, tj. koliko će se puta model ocjenjivati, se mora nekako izabrati. Može se izabrati a priori, u tom slučaju nemamo direktnu kontrolu nad kvalitetom numeričkog rezultata dobivenog Monte Carlo metodom. Razlog tomu je što će broj pokusa, potreban za davanje točnog rezultata prema propisanoj numeričkoj toleranciji, ovisiti o obliku funkcije gustoće vjerojatnosti izlazne veličine i potrebnog intervala proširenja.

Izbor vrijednosti M se uvelike uspoređuje sa $1/(1-p)$, npr. M bi trebao biti barem 10^4 puta veći od $1/(1-p)$. Tada se može očekivati da će funkcija $\boldsymbol{G}$ pružiti razuman prikaz $G_Y(\eta)$ u intervalu blizu $100p\%$ intervala proširenja za Y.

S obzirom da ne postoji nikakve garancije da će ovaj ili bilo koji drugi predodređen broj zadovoljiti, uvodi se procedura kojom se prilagođava broj pokusa *M* prema dobivenim rezultatima.

4.4. Procjena izlazne veličine i njoj pridružena standardna nesigurnost

Srednja vrijednost:

$$\tilde{y} = \frac{1}{M}\sum_{r=1}^{M} y_r \tag{24}$$

i standardno odstupanje:

$$u^2(\tilde{y}) = \frac{1}{M-1}\sum_{r=1}^{M}(y_r - \tilde{y})^2 \tag{25}$$

se uzimaju, kao procjena *y* izlazne veličine *Y*, te standardna nesigurnost *u(y)* pridružena *y*.

4.5. Interval proširenja izlazne veličine

Interval proširenja izlazne veličine se može odrediti iz diskretnog prikaza funkcije ***G***.

Uzmemo da je $q = pM$, ako *pM* je cjelobrojna vrijednost. U svakom drugom slučaju, uzimamo da je *q* cjelobrojni dio vrijednosti $pM + 1/2$. Tada je $[y_{\min}, y_{\max}]$ interval proširenja 100*p*% za izlaznu veličinu *Y*, gdje za svaki $r=1,\dots,M-q$,

$$y_{\min} = y_{(r)}, \tag{26}$$

$$y_{\max} = y_{(r+q)}. \tag{27}$$

Simetrični interval proširenja 100*p*% se dobiva uzimanjem $r = (M-q)/2$, ako je $(M-q)/2$ cjelobrojna vrijednost, a u slučaju da nije cjelobrojni dio vrijednosti $(M-q+1)/2$. Najkraći interval proširenja 100*p*% se dobiva određivanjem r^* tako da vrijedi, za $r=1,\dots,M-q$,

$$y_{(r^*+q)} - y_{(r^*)} \le y_{(r+q)} - y_{(r)}. \tag{28}$$

Zbog slučajnosti Monte Carlo metode, neki M-q intervali će biti kraći nego što bi bili u prosjeku, a neki pak dulji. Interval proširenja 100*p*% teži biti kraći od onoga izračunatog iz $G_Y(\eta)$, sa posljedicom da vjerojatnost proširenja je manja od 100*p*%. Za veliki broj *M*, ta vjerojatnost proširenja nevažno manja od 100*p*%.

Kod asimetričnih intervala proširenja 100*p*% se dobiva pretraživanjem najmanje vrijednosti iz funkcije:

$$f(x) = x_{q+r} - x_r \tag{29}$$

gdje je, kao i za simetrične razdiobe, $r = 1,\ldots,M - q$.

S obzirom da će jednadžba dati funkciju sa samo jednim ekstremom (minimumom), pretražuje se najmanja vrijednost dobivene funkcije, te se određuje pozicija dobivenog minimuma kao *x*. Tada se dobiju granice najužeg 100*p*% intervala proširenja kao

$$y_{\min} = y_x \tag{30}$$

$$y_{\max} = y_{q+x} \tag{31}$$

4.6. Izbor faktora proširenja za MCS metodu

Vrijednost faktora proširenja *k* bira se na temelju zahtijevane razine povjerenja za interval y-U do y+U. Općenito *k* će biti u području između 2 i 3. Međutim, za posebne primjene *k* može biti i izvan tog područja. Izbor prave vrijednosti za *k* može olakšati široko iskustvo s potpunim znanjem primjena koje će se postavljati na mjerni rezultat.

U najboljem slučaju, željelo bi se moći odabrati posebnu vrijednost faktora proširenja *k* koja bi osiguravala da interval $Y = y \pm U = y \pm ku_c(y)$ odgovara posebna razina povjerenja *p*, kao npr. 95 ili 99%; isto tako, željelo bi se za određenu vrijednost *k* jednoznačno navesti razinu povjerenja pridruženu tom intervalu. Međutim, to u praksi nije lako učiniti jer zahtjeva dobro poznavanje razdiobe vrijednosti koju opisuju mjerni rezultat *y* i njegova sastavljena nesigurnost $u_c(y)$. Premda su ti parametri od odlučne važnosti, oni sami nisu dostatni za utvrđivanje intervala s točno poznatim razinama povjerenja.

5. PRIMJERI

5.1. Umjeravanje mase

5.1.1. Zadavanje problema

Umjeravanje težine *W*, gustoće ρ_W može se obaviti usporedivši je sa referentnom težinom *R*, gustoće ρ_R, koja nominalno ima jednaku masu, koristeći ravnotežu u zraku, gustoće ρ_a. Koristeći Arhimedov zakon, formirat će se sljedeći model:

$$m_W(1-\rho_a/\rho_W)=(m_R+\delta m_R)(1-\rho_a/\rho_R) \tag{33}$$

gdje δm_R predstavlja masu diferencijalno male težine, gustoće ρ_R, pridodane težini *R* čime se ona dovodi u ravnotežu sa težinom *W*.

Uobičajeno je koristiti konvencionalnu masu pri zadavanju primjera, stoga će se i ovdje koristiti. Konvencionalna masa $m_{W,c}$ je masa (hipotetske) težine *W*, gustoće ρ_0 = 8000 kg/m^3 koja se uravnotežuje u zraku gustoće ρ_{a0} = 1.2 kg/m^3. Iz toga zaključuje se

$$m_W(1-\rho_{a0}/\rho_W)=m_{W,c}(1-\rho_{a0}/\rho_0) \tag{34}$$

Prema konvencionalnim masama $m_{W,c}$, $m_{R,c}$, $\delta m_{R,c}$ jednadžba () postaje

$$m_{W,c}(1-\rho_a/\rho_W)(1-\rho_{a0}/\rho_W)^{-1}=\left(m_{R,c}+\delta m_{R,c}\right)(1-\rho_a/\rho_R)(1-\rho_{a0}/\rho_R)^{-1} \tag{35}$$

Ovakva jednadžba se može napisati u praktičnijem obliku

$$m_{W,c}=(m_{R,c}+\delta m_{R,c})\left[1+(\rho_a-\rho_{a0})(\frac{1}{\rho_W}-\frac{1}{\rho_R})\right] \tag{36}$$

Ukoliko se pretpostavi da

$$\delta m=m_{W,c}-m_{nom} \tag{37}$$

predstavlja odstupanje $m_{W,c}$ od nominalne mase.

$$m_{nom} = 100\,\mathrm{g}$$

Model koji se koristi u ovom primjeru je zadan jednadžbom

$$\delta m = (m_{R,c} + \delta m_{R,c})\left[1 + (\rho_a - \rho_{a0})(\frac{1}{\rho_W} - \frac{1}{\rho_R})\right] - m_{nom}\,. \tag{38}$$

Veličinama $m_{R,c}$, $\delta m_{R,c}$ dodijeljena je normalna razdioba, sa najboljom procjenom korištenu kao očekivanje navedene veličine, te njoj pridruženoj standardna nesigurnost kao standardno odstupanje.

Veličinama ρ_a, ρ_W, te ρ_R pridružena je pravokutna razdioba, sa poznatim donjim i gornjim granicama razdiobe.

Tablica 3: Ulazne veličine X_i i njima dodijeljene razdiobe za model umjeravanja mase

X_i	Razdioba	Parametri			
		Očekivanje μ	Standardno odstupanje	Očekivanje $x=(a+b)/2$	Polu-širina $(b-a)/2$
$m_{R,c}$	$N(\mu, \sigma^2)$	100 000,000 mg	0,050 mg		
$\delta m_{R,c}$	$N(\mu, \sigma^2)$	1,234 mg	0,020 mg		
ρ_a	$R(a, b)$			1,20 kg/m^3	0,10 kg/m^3
ρ_W	$R(a, b)$			8000 kg/m^3	1000 kg/m^3
ρ_R	$R(a, b)$			8000 kg/m^3	50 kg/m^3

5.1.2. Rezultati

Kako bi se dobila procjena $\delta\hat{m}$, njoj pridružena standardna nesigurnost $u(\delta\hat{m})$, te najuži 95%-tni interval proširenja, korištene su obje metode – Monte Carlo, te GUM. Dobiveni rezultati su prikazani u tablici 4. mg^{-1}

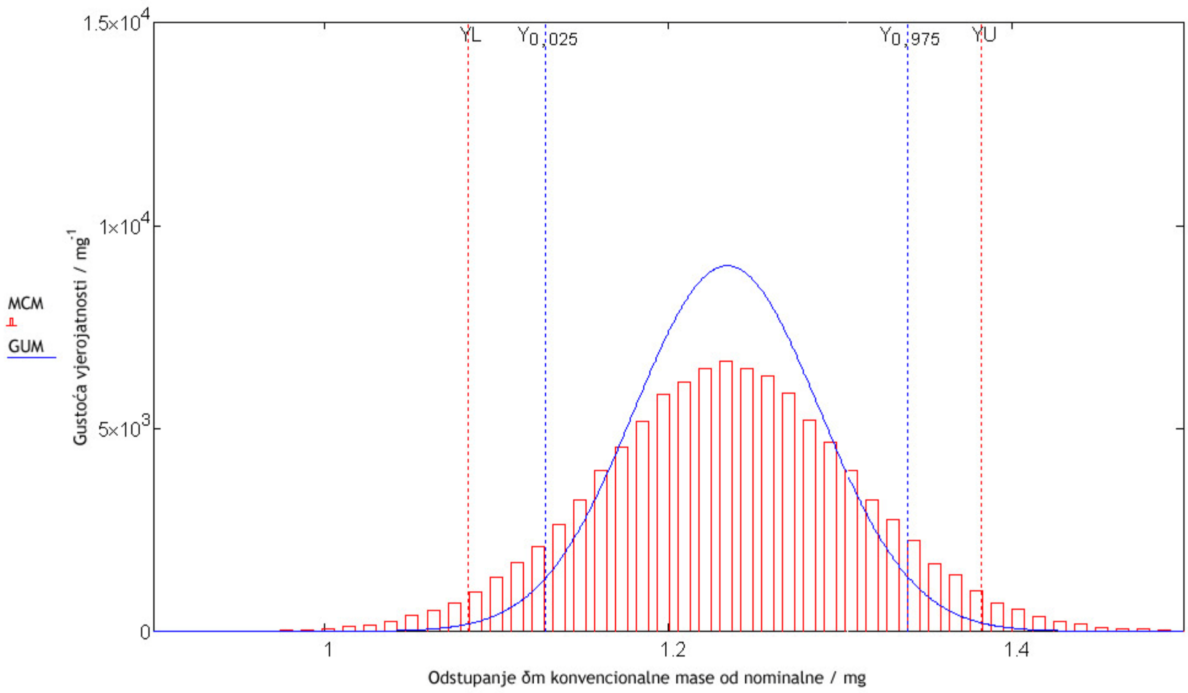
Tablica 4: Rezultati provedene simulacije modela umjeravanja mase za MCM i GUM(I)

Metoda	$\delta\hat{m}$ /mg (procjena)	$u(\delta\hat{m})$ /mg (standardna nesigurnost)	Najkraći 95% interval proširenja / mg [donja; gornja]	Razlika u granicama	
				Donja / mg	Gornja / mg
MCS	1,2339	0,0757	[1,0834; 1,3817]		
GUM (I)	1,2340	0,0539	[1,1284; 1,3396]	0,0450	0,0421

MCS predstavlja izvršenu simulaciju prema Monte Carlo metodi, dok GUM (I) označava proračun standardne nesigurnosti GUM metodom zamjenjivanjem modela aproksimacijom Taylorovim nizom prvog reda.

Slika 9 prikazuje aproksimaciju funkcije gustoće vjerojatnosti. Crvene isprekidane linije prikazuju najkraći 95%-tni interval proširenja za Monte Carlo metodu, dok plave isprekidane linije prikazuju najkraći 95%-tni interval proširenja za GUM metodu. Prema GUM metodi, svaka izlazna razdioba teži normalnoj razdiobi, te plava neprekinuta linija prikazuje normalnu raspodjelu sa parametrima zadanima prema GUM.

Kako iz tablice 4, tako i iz slike 9, je vidljivo da se procjene $\delta\hat{m}$ poklapaju i u GUM i MCS metodi, dok su standardne nesigurnosti već značajno razlikuju. Iz tog razloga se ni intervali proširenja razlikuju, kao što je vidljivo iz slike 9.



Slika 9: Aproksimacija funkcije gustoće vjerojatnosti

Ukoliko se u GUM metodi zamjeni model aproksimacijom Taylorovim nizom višeg reda, dobiju se rezultati prikazani u tablici 5.

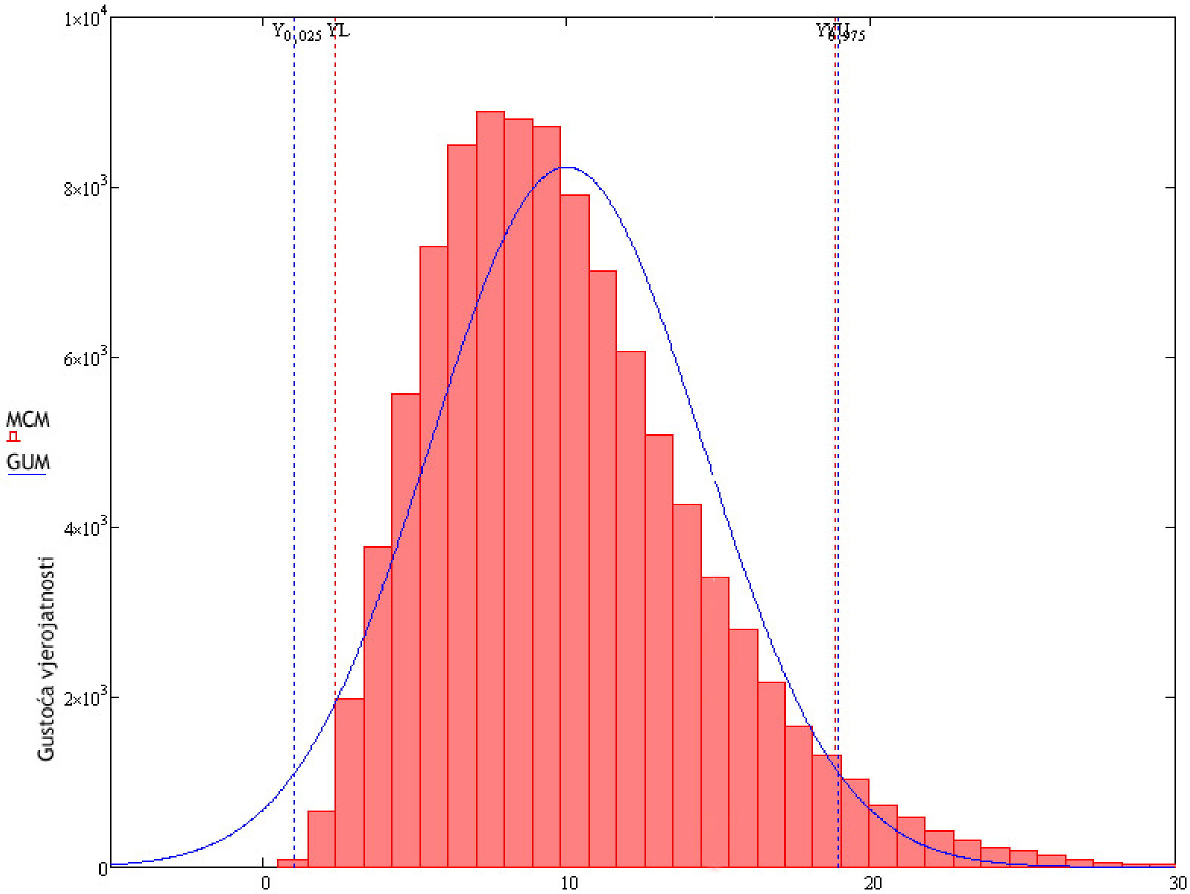
Tablica 5: Rezultati provedene simulacije modela umjeravanja mase za MCM i GUM(II)

Metoda	$\delta\hat{m}$ /mg (procjena)	$u(\delta\hat{m})$ /mg (standardna nesigurnost)	Najkraći 95% interval proširenja / mg [donja; gornja]	Razlika u granicama	
				Donja / mg	Gornja / mg
MCS	1,2339	0,0757	[1,0834; 1,3817]		
GUM (II)	1,2340	0,0750	[1,0836; 1,3836]	0,0002	0,0019

Iz tablica 5 je vidljivo da se model zamjeni aproksimacijom Taylorovim nizom višeg reda, rezultati GUM i MCS metode se poklapaju u puno većoj mjeri.

5.2. Asimetrična razdioba

U svrhu utvrđivanja utjecaja faktora proširenja *k*, u postupku procjenjivanja proširene mjerne nesigurnosti, primijenjena je GUM i Monte Carlo metoda na asimetričnoj izlaznoj razdiobi. GUM metoda svaku izlaznu razdiobu aproksimira normalnom, što je prikazano na slici 10 plavom neprekinutom linijom. No, kao što se vidi iz slike 10, izlazna razdioba se ne mora uvijek poklapati sa normalnom.



Slika 10: Aproksimacija gustoće vjerojatnosti za asimetričnu razdiobu

U tablici 6 su dane vrijednosti za aritmetičku sredinu, medijan, standardnu nesigurnost, te intervale proširenja ovog primjera.

Tablica 6: Ključne vrijednosti primjera 2

	$\bar{x}$	$\tilde{x}$	s	95% interval proširenja
GUM	9,995	9,342	4,467	[1,061; 18,929]
MCM	9,995	9,342	4,467	[2,425; 18,830]

Kao što se može vidjeti iz priložene slike i danih rezultata, normalna razdioba i ovaj puta ne odgovara u potpunosti izlaznoj raspodjeli vjerojatnosti. GUM metodom je moguće dobiti točne intervale proširenja ukoliko se radi o simetričnoj izlaznoj razdiobi, no ukoliko je razdioba asimetrična, kao u ovom primjeru, dolazi do značajnih odstupanja u rezultatima.

6. ZAKLJUČAK

U radu su dane temeljne postavke proračuna mjerne nesigurnosti kod primjene GUM metode, odnosno kasnije, Monte Carlo metode. Klasična GUM metoda, pri proračunu mjerne nesigurnosti, koristi nekoliko tipova pretpostavki od kojih je za ovaj rad bila ključna pretpostavka izlazne raspodjele. GUM metoda pretpostavlja da se sve izlazne raspodjele mogu aproksimirati normalnom (Gaussovom) raspodjelom, što je slučaj samo kod simetričnih linearnih razdioba. Tada GUM metoda daje točno rješenje mjerne nesigurnosti.

Kod asimetričnih i nelinearnih problema, GUM metoda neće dati pravo rješenje, već za to je osmišljena novi pristup znan kao Monte Carlo metoda. Monte Carlo simulacija je jednostavnija metoda proračuna mjerne nesigurnosti. S obzirom kako simulacijom mjernih rezultata, nekad i u rasponu od 100 000, ne možemo dobiti dva ista rješenja izlazne raspodjele, tako je apsolutno točno rješenje Monte Carlo metodom isključeno na samom početku. No, Monte Carlo simulacija daje približno točne rezultate, a u slučaju asimetričnih i nelinearnih problema znatno točnije od klasične GUM metode.

U svrhu utvrđivanja utjecaja faktora proširenja *k* na funkciju oblika izlazne raspodjele izvršena je simulacija dva primjera, u kojima su opisani dobiveni rezultati simulacije. Kao što je već rečeno, a u primjerima i potvrđeno, u slučajevima asimetričnih razdioba Monte Carlo metoda daje točnija rješenja nego li GUM metoda.

7. LITERATURA

[1] International Organization for Standardization (ISO), *International vocabulary of metrology – Basic and general concepts and associated terms (VIM)*, 3rd edition, Geneva, Switzerland, 2008.

[2] Državni zavod za normalizaciju i mjeriteljstvo, *Upute za iskazivanje mjerne nesigurnosti*, Zagreb, 1995.

[3] Joint Committee for Guides in Metrology, *Evaluation of Measurement Data – Supplement 1 to the „Guide to the Expression of Uncertainty in Measurment“ – Propagation of Distributions Using a Monte Carlo Method*, 2006.

[4] R. Willink, *On using the Monte Carlo method to calculate uncertainty intervals*, 2006.

[5] B. Runje, *Istraživanje mjernih nesigurnosti u postupcima umjeravanja etalona duljine, Doktorska disertacija*, FSB Zagreb, 2002.